ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES (H, P')

DURÉE : 2 heures

Objet du problème : Calculer l'inverse d'une matrice par partitionnement.

I

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre p, $p \geq 2$, partitionnée de la façon suivante :

$\left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline {}^tD & a \end{array}\right]$ où B est une matrice d'ordre p-1, supposée inversible,

C est un vecteur colonne à p-1 composantes,
${}^tD$ est un vecteur ligne à p-1 composantes et a un nombre réel.

On désigne par $V_1,\ldots,V_p$ les vecteurs colonnes de A et par $W_1,\ldots,W_{p-1}$ les vecteurs colonnes de B.

1. a. Montrer qu'il existe un unique (p-1)-uplet $\Lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}) \in R^{p-1}$ tel que :

$$C = \lambda_1 W_1 + \ldots + \lambda_{p-1} W_{p-1}.$$

Exprimer Λ à l'aide de B^{-1} et C.

b. Prouver que A non inversible équivaut à :

$$a = {}^tDB^{-1}C.$$

2. On se place dans le cas où A est inversible et on partitionne A^{-1} de la même façon que A :

$A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline {}^tZ & u \end{array}\right]$ où X est une matrice d'ordre p-1,

Y un vecteur colonne à p-1 composantes,
${}^tZ$ un vecteur ligne à p-1 composantes,
u un nombre réel.

Démontrer les quatre relations suivantes :

$$(1)\ u = \frac{1}{a - {}^tDB^{-1}C}\ ;\quad (3)\ {}^tZ = -u\ {}^tDB^{-1}$$

$$(2)\ Y = -uB^{-1}C\ ;\quad (4)\ X = B^{-1} + uB^{-1}C\ {}^tDB^{-1}$$

Remarque : La relation (3) peut s'écrire : $Z = -u\ {}^tB^{-1}D$.

Ces relations permettent d'obtenir l'inverse de A, lorsqu'on connaît l'inverse de B.

II

Dans cette partie on écrit quelques procédures en Turbo-Pascal, utiles au calcul de l'inverse d'une matrice, ce qui sera fait en III.
On donne l'en-tête du programme.

```
CONST  Nmax = 20 ; {Ordre maximum des matrices du problème}
TYPE   Matrice = Array[1..Nmax,1..Nmax] of real ;
       Vecteur = Array[1..Nmax] of real ;
VAR    Epsilon : real ;
```

Les procédures qui utilisent des matrices d'ordre $k \leq$ Nmax, ne considèreront que les éléments des k premières lignes et des k premières colonnes d'un tableau de dimension Nmax ; les autres éléments pourront ne pas être initialisés.

Parmi les paramètres d'une procédure ou d'une fonction figurera l'argument Dim qui sera l'ordre des matrices ou des vecteurs intervenant dans la procédure ou la fonction.

On donne les procédures suivantes qu'on ne demande pas d'écrire, mais que l'on pourra utiliser.

- Procedure Add(M1,M2 : Matrice ; dim : integer ; Var S : Matrice) ;
  donnant dans S la somme M1+M2 de deux matrices d'ordre dim.

- Procedure Reel_Mat (x : real ; M : Matrice ; dim : integer ; Var P : Matrice) ;
  donnant dans P la matrice xM d'ordre dim.

- Procedure Reel_Vecteur (x : real ; V : Vecteur ; dim : integer ; Var W : vecteur) ;
  donnant dans W le vecteur xV d'ordre dim.

- Procedure Transpose (M : Matrice ; dim : integer ; Var T : Matrice) ;
  donnant dans T la matrice transposée de M d'ordre dim.

1. a. Ecrire une procedure Mat_Col (M : Matrice ; Col : Vecteur ; dim : integer ; Var V : Vecteur) ;
   donnant dans V le produit M.Col, où Col est un vecteur colonne à dim composantes.

   b. Ecrire une Function VliCol (Li,Col : Vecteur ; dim : integer) : real ;
   donnant le produit scalaire ${}^tLi.Col$, où ${}^tLi$ est un vecteur ligne à dim composantes.

   c. Ecrire une procédure appellée Col_Vli , donnant le produit du vecteur colonne Col et du vecteur ligne ${}^tLi$, dans cet ordre.

2. Soit A une matrice d'ordre $p \geq 2$, partitionnée comme dans la partie I , avec les mêmes notations.
   a. Ecrire une Procedure InitVecteur (A : Matrice ; dim : integer ; Var D,C : Vecteur) ;
   donnant les vecteur D et C , ayant dim-1 composantes.

b. Ecrire une Function Element (A, H : Matrice ; dim : integer) : real ;
où H est la matrice B^{-1} ;(H d'ordre (dim-1) supposée connue), donnant la valeur de :

$$a - {}^tDHC \quad \text{[relation (1) du I.2]}$$

Si cette valeur est «informatiquement nulle » , c'est à dire si sa valeur absolue est inférieure à Epsilon, variable initialisée par une procédure d'entrée des données, alors arrêter le programme par l'instruction : Halt.

III

1. Utiliser les procédures et les fonctions de la partie II et les relations de I.2 pour écrire une
Procedure Inv (A,H : Matrice ; dim : integer ; Var F : Matrice) ;
donnant dans F la matrice inverse de A d'ordre dim, H étant toujours B^{-1} supposée connue.

2. Soit A une matrice telle que $A[1,1] \neq 0$. Tout ce qui précède permet de construire un algorithme donnant l'inverse de A en partant de A[1,1], considéré comme une matrice B inversible d'ordre 1, et en agrandissant à chaque pas la matrice B jusqu'à aboutir à la matrice A.
A l'aide de cet algorithme, écrire une :
Procedure Inverse (A : Matrice ; dim : integer ; Var Minv : Matrice) ;
donnant dans Minv l'inverse de A qui est d'ordre dim.

3. Dans cette question on ne demande pas de rédiger des procédures.
Comment pourrait-on faire :
   a. Si $A[1,1] = 0$, mais qu'il existe qu'il existe au moins un élément diagonal non nul ?

   b. Si tous les éléments diagonaux de A sont nuls ?

   c. Si au cours de la procédure Inverse, la fonction Element prend la valeur 0 ? La matrice A est-elle alors non inversible ?

FIN